

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

线性代数笔记23——矩阵的对角化和方幂

特征值矩阵

假设A有n个线性无关的特征向量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，这些特征向量按列组成矩阵S，S称为特征向量矩阵。来看一下A乘以S会得到什么：

$$\begin{aligned} AS &= A[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] = [\lambda_1 x_1 \ \lambda_2 x_2 \ \dots \ \lambda_n x_n] \\ &= [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

最终得到了S和一个以特征值为对角线的对角矩阵的乘积，这个对角矩阵就是特征值矩阵，用 Λ 表示：

$$AS = S\Lambda = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}_S \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}_\Lambda$$

没有人关心线性相关的特征向量，上式有意义的前提是S由n个线性无关的特征向量组成，这意味着S可逆，等式两侧可以同时左乘 S^{-1} ：

$$\begin{aligned} AS &= S\Lambda \\ S^{-1}AS &= \Lambda \end{aligned}$$

$AS=S\Lambda$ 和 $S^{-1}AS=\Lambda$ 就是对角化的两种方法。需要注意的是，并非所有矩阵A都存在n个线性无关的特征向量，这类矩阵不能对角化。

矩阵对角化还有另一种表达：

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

我们已经知道了矩阵的LU分解， $A=LU$ ；格拉姆-施密特正交化， $A=QR$ ；现在又多了一种对角化分解， $A=S\Lambda S^{-1}$

矩阵的方幂

如果A存在特征值和特征向量，即 $Ax = \lambda x$ ，那么 A^2 的特征值和特征向量是什么？

这在上一章的示例中出现过，将 $Ax = \lambda x$ 的等式两侧同时左乘A就可以表示A的特征向量：

$$A^2x = A\lambda x$$

由于 λ 是标量，所以可以把 λ 单独提出来：

$$A^2x = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$$

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

现在可以得出结论了， A^2 的特征向量不变，特征值变成了 λ^2

可以用同样的方式看看 A^2 的对角化：

$$A = S\Lambda S^{-1}$$
$$A^2 = AS\Lambda S^{-1} = S\Lambda \underbrace{S^{-1}S}_I \Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}$$
$$\Lambda^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix}$$

按照这个思路可以继续计算 A^k 的对角化， A^k 的特征向量不变， A^k 的特征值矩阵是A的特征值矩阵的k次方：

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1}$$

根据上式，如果 $k \rightarrow \infty$ ，在所有特征值 $|\lambda_i| < 0$ 时， $A^k \rightarrow 0$ ，当然，前提是A有n个线性无关的特征向量。

对角化的前提

对角化的前提是A存在n个线性无关的特征向量，问题是怎样判断A存在n个线性无关的特征向量？一个判断方法是：当A的所有特征组互不相同时，A必然存在n个线性无关的特征向量；如果存在重复的特征值就不好说了，需要另行判断。

n阶单位矩阵的所有特征值都是1，但是它仍然有n个线性无关的特征向量，因此单位矩阵可以对角化：

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} x = \lambda x$$
$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, x_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$S = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$
$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$
$$A = S\Lambda S^{-1}$$

再来看三角矩阵。三角矩阵A的各列是线性无关的，意味着它有唯一解，没有n个线性无关的特征向量，比如下面这个：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

先计算A的特征值：

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程 提个issue，最速降线中 $v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 0 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

$$(A - \lambda I)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

作为2×2矩阵，A只有一个特征向量，它无法完成对角化。

使用对角化

给定一个向量 u_0 和一个能够对角化的矩阵A，如果 $u_{k+1} = Au_k$ ，那么 $u_{100} = ?$

可以简单的向后推导一下：

$$u_1 = Au_0, \quad u_2 = Au_1 = AAu_0 = A^2u_0, \dots, \quad u_k = A^k u_0$$

现在可以得到结论， $u_{100} = A^{100} u_0$ ，问题是如何求得 A^{100} ？

A有n个线性无关的特征向量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，这意味着 u_0 可以看成这些特征向量的线性组合：

$$u_0 = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$$

以单位矩阵为例，假设A是3×3的单位矩阵，则A的三个特征向量是：

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这三个特征向量可以通过线性组合成为任意的三维向量。

现在可以将 Au_0 写成下面的形式：

$$Au_0 = A(C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n) = AC_1 x_1 + AC_2 x_2 + \dots + AC_n x_n$$

由于 C_i 是标量，所以可以将 C_i 写到前面：

$$Au_0 = C_1 Ax_1 + C_2 Ax_2 + \dots + C_n Ax_n$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ 都是A的特征向量，它们以特征值为媒介和A存在关联， $Ax_i = \lambda_i x_i$ ，因此：

$$Au_0 = C_1 \lambda_1 x_1 + C_2 \lambda_2 x_2 + \dots + C_n \lambda_n x_n$$

等式两侧同时左乘A：

$$A^2 u_0 = AC_1 \lambda_1 x_1 + AC_2 \lambda_2 x_2 + \dots + AC_n \lambda_n x_n$$

同样，可以把比标量 $C_i \lambda_i$ 放到前面：

$$A^2 u_0 = C_1 \lambda_1 A x_1 + C_2 \lambda_2 A x_2 + \dots + C_n \lambda_n A x_n = C_1 \lambda_1^2 x_1 + C_2 \lambda_2^2 x_2 \dots + C_n \lambda_n^2 x_n$$

无论等式两侧再左乘几个A都将得到类似的结果，因此：

$$A^{100}u_0 = C_1\lambda_1^{100}x_1 + C_2\lambda_2^{100}x_2 \dots + C_n\lambda_n^{100}x_n$$

$$\text{let } C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}, \quad S = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n], \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$u_0 = SC, \quad A^k = SA^kS^{-1} \Rightarrow$$

$$A^{100}u_0 = SA^{100}S^{-1}u_0 = SA^{100}S^{-1}SC = SA^{100}C$$

这就是最终的答案，如果真要计算 $A^{100}u_0$ ，可以先把 u_0 展开成特征向量的线性组合，求出具体的C值，在使用 $SA^{100}C$ 求解。

综合示例

$$C = \begin{bmatrix} 2b-a & a-b \\ 2b-2a & 2a-b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad C^k = ?$$

$$\text{when } a = b = -1, \quad C^{100} = ?$$

a,b都是0的时候没什么可算的，主要看 $ab \neq 0$ 的情况。C看起来比较别扭，还是用A来说话。先来看一下特征值：

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2b-a-\lambda & a-b \\ 2b-2a & 2a-b-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (2b-a-\lambda)(2a-b-\lambda) - (a-b)(2b-2a) = \lambda^2 - b\lambda - a\lambda + ab = (\lambda-a)(\lambda-b) = 0$$

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = b$$

$$\text{when } \lambda_1 = a$$

$$(A - \lambda_1 I)x_1 = \begin{bmatrix} 2b-a-a & a-b \\ 2b-2a & 2a-b-a \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} 2b-2a & a-b \\ 2b-2a & a-b \end{bmatrix} x_1 = 0$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{when } \lambda_2 = b$$

$$(A - \lambda_2 I)x_2 = \begin{bmatrix} 2b-a-b & a-b \\ 2b-2a & 2a-b-b \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} b-a & a-b \\ 2b-2a & 2a-2b \end{bmatrix} x_2 = 0$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

特征值矩阵和特征向量矩阵是：

$$S = [x_1 \ x_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{|S|} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad A^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$$

$$A^k = SA^kS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

当 $a=b=-1$ 时：

$$A^{100} = \begin{bmatrix} (-1)^{100} & 0 \\ 0 & (-1)^{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{100} = SA^{100}S^{-1} = SS^{-1} = I$$

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: [线性代数](#)

标签: [对角化矩阵](#), [特征值矩阵](#), [特征向量矩阵](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288

[+加关注](#)

0
[推荐](#)

0
[反对](#)

« 上一篇: [线性代数笔记22——特征值和特征向量](#)

» 下一篇: [整数的故事\(1\)](#)

posted on 2018-12-29 15:07 我是8位的 阅读(4470) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn

JAVA Office
文档在线编辑
APIs

打开 >

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日-3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
- 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型

- Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
- 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
[博客园](#)

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes